

# Zur Kreiszyinderschale unter Manteldruck

Dierks, Klaus

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 17, 1965,  
S.139-153



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

# Zur Kreiszyllinderschale unter Manteldruck

Von Klaus Dierks

Vorgelegt von A. Pflüger

(Eingegangen am 9. 7. 1965)

Übersicht: Auf Grund des Prinzips vom stationären Wert der potentiellen Energie werden mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens Kraft-Verformungskurven der Kreiszyllinderschale unter Manteldruck im überkritischen Bereich ermittelt.

Als Instabilitätskriterium wird die von Pflüger [5] für die axialgedrückte Kreiszyllinderschale vorgeschlagene Hypothese über die zum Durchschlagen führenden Störverschiebungen benutzt.

*Summary: On the basis of the principle of the stationary value of potential energy, force-deflection diagrams in the post-buckling range of cylindrical shells subjected to lateral pressure are found by the Ritz-method.*

*The hypothesis about the influence of disturbances, proposed by Pflüger [5] for the axially compressed cylindrical shell, is used as an instability criterion.*

## Bezeichnungen

$l, r, t$	Länge, Radius, Wanddicke der Schale
$\alpha = \frac{\pi r}{l}, \quad \beta = \frac{t^2}{12 r^2}$	
$s, q, z$	Koordinaten, s. Abb. 2
$x = \frac{s}{r}, \quad \frac{\partial (\dots)}{\partial x} = (\dots)', \quad \frac{\partial (\dots)}{\partial \varphi} = (\dots)''$	
$w$	Verschiebung eines Punktes der Mittelfläche in $z$ -Richtung
$E, \mu$	Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl
$B = \frac{E t^3}{12 (1 - \mu^2)}$	
$q$	vorhandener Manteldruck
$q_0$	beliebiger Eigenwert
$q_K$	kritischer (niedrigster) Eigenwert
$q_{KD}$	kritischer Druck bei endlichen Störungen, Beuldruck (Durchschlagsdruck)
$w_m$	maximale Beulordinate
$w_{st}, w_v$	Störverschiebung, Vorverformung
$n$	Anzahl der Beulwellen über den Zylinderumfang

$$\nu = \frac{n^2}{\alpha^2}$$

$n_x, n_\varphi, n_{x\varphi}, n_{\varphi x}$	Schnittkräfte	} nach Abb. 1
$m_x, m_\varphi, m_{x\varphi}$	Schnittmomente	
$q_x, q_\varphi$	Querkräfte	
$F$	Spannungsfunktion	
$w_0, F_0$	Größen des Grundzustandes	
$\bar{w}, \bar{F}$	Zusatzgrößen	
$\tilde{w}, \tilde{F}$	Ansatzfunktionen	

Weitere weniger wichtige Bezeichnungen und Abkürzungen werden an den Stellen ihrer Einführung erläutert.

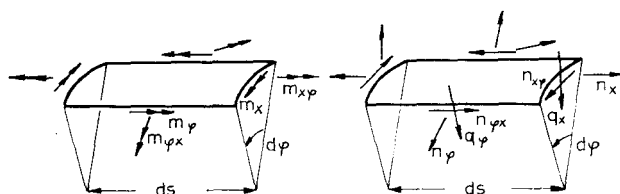


Abb. 1  
Zur Definition  
der Schnittgrößen

## 1. Einleitung

Eine Kreiszylinderschale, die durch einen gleichmäßig verteilten Druck auf den Zylindermantel belastet wird, beult im allgemeinen aus, wenn der Druck eine bestimmte Höhe, den Beuldruck, erreicht. Da es im ausgebeulten Zustand Gleichgewichtslagen geben kann, zu denen Lasten gehören, die unterhalb des kleinsten Eigenwertes der klassischen Stabilitätstheorie liegen, ist der Beuldruck abhängig von dem Tragverhalten des Zylinders nach dem Ausbeulen. In diesem Fall hat die Zylinderschale die Tendenz, vor Erreichen der klassischen kritischen Last in eine ausgebeulte Gleichgewichtslage durchzuschlagen.

Das Nachbeulverhalten wurde bereits mehrfach untersucht. U. a. haben *Nash* [2] und *Kempner* [3] unter Verwendung der *Donnell'schen* Gleichungen [1] Kraft-Verformungskurven im Nachbeulbereich ermittelt. Die Minima dieser Kurven liegen etwa 10 v. H. unter dem Wert der klassischen kritischen Last des Eigenwertproblems. *Wolmir* [6] hat für den Parameterwert  $l^2/r t = 260$  eine Kraft-Verformungskurve angegeben, deren tiefster Punkt 40 v. H. unter der klassischen kritischen Last liegt. Da bei Nachrechnungen Abweichungen von den veröffentlichten Ergebnissen festgestellt wurden [7], soll das Problem hier noch einmal behandelt werden.

## 2. System und Belastung

Die isotrope Kreiszylinderschale konstanter Wanddicke sei an den Endquerschnitten durch Scheiben ausgesteift, die senkrecht zu ihrer Ebene sehr weich sind und in ihrer Ebene nur eine rotationssymmetrische Verschiebung zulassen (Abb. 2). Dann können senkrecht zur Scheibenebene keine Momente

und Querkräfte aufgenommen werden. Durch die rotationssymmetrische Verschieblichkeit der Schalenränder werden Randstörungseffekte ausgeschaltet, die hier leicht versteifend wirken würden, deren Einfluß aber wegen der kurzen Abklingungslänge vernachlässigbar klein ist.

Die Belastung bestehe aus einem gleichmäßig verteilten Manteldruck  $q$ .

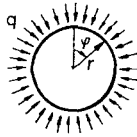
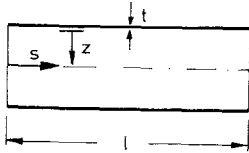


Abb. 2  
Kreiszyllinderschale unter Manteldruck

### 3. Differentialgleichungen und Lösungsmethode

Eine geschlossene Lösung der seit langem bekannten nichtlinearen Differentialgleichungen der technischen Schalentheorie<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w &= \frac{r}{B} (F'' r + F'' w'' + F'' w'' - 2 F' w' + q r^2), \\ \Delta \Delta F &= - \frac{E t}{r^2} (r w'' - w'^2 + w'' w'') \end{aligned} \quad (1a, b)$$

läßt sich nicht angeben. Daher wird zu einer angenäherten Lösung das *Ritzsche* Verfahren gewählt. Die Voraussetzungen für eine erfolgversprechende Anwendung der *Ritzschen* Methode sind gegeben: Erstens läßt sich ein Variationsproblem finden, dessen *Eulersche* Differentialgleichungen die Gleichungen (1a, b) des Problems sind, zweitens kann durch eine einfache Ergänzung der klassischen Lösung ein Ansatz konstruiert werden, der die geforderten Randbedingungen erfüllt.

### 4. Potential

Ein geeignetes Variationsproblem ist das Prinzip vom stationären Wert der potentiellen Energie<sup>2)</sup>

$$\delta \Pi = 0. \quad (2)$$

Das Gesamtpotential  $\Pi$  setzt sich zusammen aus dem Potential der inneren Kräfte  $\Pi_i$  und dem Potential der äußeren Kräfte  $\Pi_a$ .

Drückt man die Membranschnittkräfte durch eine Spannungsfunktion  $F$  in der Form

$$F' = n_x, \quad F'' = n_\varphi, \quad F' = -n_{x\varphi}$$

aus, während die Momente als Ableitungen der Durchbiegungsfunktion  $w$  geschrieben werden, dann läßt sich das Potential der inneren Kräfte folgendermaßen schreiben:<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> z. B. [8], S. 260–261, Gl. (14a, b).

<sup>2)</sup> Näheres siehe z. B. [8], S. 39.

<sup>3)</sup> Einzelheiten der Ableitung finden sich in [9].

$$\begin{aligned} \Pi_i = \frac{1}{2} \iint_{s \varphi} & \left\{ -\frac{r^2}{E t} (F''^2 + F''^{\cdot 2} + 2 F'^{\cdot 2}) - 2 r F'' w + F'' w^{\cdot 2} + F''^{\cdot} w'^2 \right. \\ & \left. - 2 F''^{\cdot} w' w^{\cdot} + \frac{E t^3}{12 (1 - \mu^2) r^2} (w''^2 + w''^{\cdot 2} + 2 w'^{\cdot 2}) \right\} dx d\varphi. \end{aligned} \quad (3a)$$

Das Potential der äußeren Kräfte lautet

$$\Pi_a = - \int_{\varphi} \int_s q r^2 w dx d\varphi. \quad (3b)$$

Zur Kontrolle seien die *Eulerschen* Gleichungen des Variationsproblems  $\delta (\Pi_i + \Pi_a) = 0$  gebildet. Mit der abkürzenden Bezeichnung  $H$  für den Integranden von  $\Pi$  erhält man im einzelnen folgendes.

Variation nach  $w$ :

$$\frac{\partial H}{\partial w} + \left( \frac{\partial H}{\partial w''} \right)'' + \left( \frac{\partial H}{\partial w''^{\cdot}} \right)'' + \left( \frac{\partial H}{\partial w'^{\cdot}} \right)' - \left( \frac{\partial H}{\partial w'} \right)' - \left( \frac{\partial H}{\partial w^{\cdot}} \right)' = 0. \quad (4a)$$

Nach Ausführung der Differentiationen

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial w} &= -2 F'' r - q r^2, & \left( \frac{\partial H}{\partial w''} \right)'' &= \frac{B}{r^2} 2 w''''', \\ \left( \frac{\partial H}{\partial w''^{\cdot}} \right)'' &= \frac{B}{r^2} 2 w''', & \left( \frac{\partial H}{\partial w'^{\cdot}} \right)' &= \frac{B}{r^2} 4 w''''', \\ \left( \frac{\partial H}{\partial w'} \right)' &= 2 (F''^{\cdot} w' + F'' w'' - F''^{\cdot} w^{\cdot} - F''^{\cdot} w'^{\cdot}), \\ \left( \frac{\partial H}{\partial w^{\cdot}} \right)' &= 2 (F''^{\cdot} w^{\cdot} + F'' w'' - F''^{\cdot} w' - F''^{\cdot} w'^{\cdot}) \end{aligned}$$

folgt aus (4a)

$$\Delta \Delta w = \frac{r^2}{B} (r F'' + F'' w'' + F'' w'' - 2 F'' w'^{\cdot} + q r^2),$$

also in der Tat die Gl. (1a).

Variation nach  $F$ :

$$\left( \frac{\partial H}{\partial F''} \right)'' + \left( \frac{\partial H}{\partial F''^{\cdot}} \right)'' + \left( \frac{\partial H}{\partial F'^{\cdot}} \right)' = 0. \quad (4b)$$

Die ausdifferenzierten Glieder

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial H}{\partial F''} \right)'' &= -\frac{r^2}{E t} 2 F'''' + (2 w'^{\cdot} w^{\cdot})' - 2 w'' r, \\ \left( \frac{\partial H}{\partial F''^{\cdot}} \right)'' &= -\frac{r^2}{E t} 2 F''' + (2 w' w')', \\ \left( \frac{\partial H}{\partial F'^{\cdot}} \right)' &= -\frac{r^2}{E t} 4 F'''' - 2 (w' w' + w w''). \end{aligned}$$

in (4b) eingesetzt führen auf (1b).

Damit ist gezeigt, daß das Variationsproblem (2) ein den Differentialgleichungen (1) zugeordnetes Variationsproblem darstellt.

### 5. Verzweigungslasten

Aus dem Ausdruck (3) für das Potential des nichtlinearen Problems läßt sich durch Linearisierung leicht das Potential für das Stabilitätsproblem der technischen Schalentheorie ableiten. Das nach Abspaltung des Potentials des Grundzustandes verbleibende Potential der Zusatzgrößen sei  $\bar{\Pi}$  und lautet

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \int_0^s \int_0^{2\pi} \left[ \frac{B}{r^2} (\bar{w}''^2 + \bar{w}'' \cdot \bar{w}'' + 2 \bar{w}' \cdot \bar{w}') - \frac{r^2}{E t} (\bar{F}''^2 + \bar{F}'' \cdot \bar{F}'' + 2 \bar{F}' \cdot \bar{F}') \right. \\ \left. + F_0'' \bar{w}''^2 - 2 \bar{F}'' \bar{w}'' - q r^2 \bar{w} \right] dx d\varphi. \quad (5)$$

Die Eulerschen Gleichungen des Variationsproblems

$$\delta \bar{\Pi} = 0$$

sind

$$\Delta \Delta \bar{w} = \frac{r^2}{B} (r \bar{F}'' + F_0'' \bar{w}'' + q r^2), \\ \Delta \Delta \bar{F} = - \frac{E t}{r} \bar{w}''.$$

Nach Elimination von  $\bar{F}$  folgt daraus

$$\Delta \Delta \Delta \Delta \bar{w} + 12 (1 - \mu^2) \frac{r^2}{t^2} \bar{w}'''' = 12 \frac{(1 - \mu^2) r}{t} \frac{q r^2}{E t^2} \Delta \Delta \bar{w}. \quad (6)$$

Gl. (6) hat die Lösung

$$\bar{w} = a \sin \alpha x \cos n \varphi,$$

die auf die Beulgleichung der technischen Schalentheorie<sup>4)</sup>

$$q_0 \frac{r}{E t} = \frac{1}{n^2 (1 + \nu)^2} + \frac{\beta}{1 - \mu^2} \frac{n^2 (1 + \nu)^2}{r^2} \quad (7)$$

führt.

Es ist angebracht, durch einen Vergleich der Lösung dieser Gleichung mit den Ergebnissen der genaueren *Flüggeschen* Theorie [4] die Gültigkeitsgrenzen der vereinfachten technischen Theorie festzustellen. Man erhält Gl. (7) ebenfalls, wenn in der *Flüggeschen* Lösung die niederen Potenzen der Beulenzahlen gegen die höchsten vernachlässigt werden. Die technische Theorie ist daher um so brauchbarer, je kurzwelliger die Beulen auftreten. Für lange Zylinder ist die Beulenzahl  $n = 2$ . Die Beullasten nach der technischen Theorie sind für  $l/r \rightarrow \infty$  um  $1/3$  zu hoch.

<sup>4)</sup> siehe z. B. [6], S. 352.

Neben der Zylinderlänge hat auch die Wanddicke einen Einfluß auf die Beulenzahlen und auf die Größe des Fehlers. Aus Abb. 3 ist im einzelnen der Verlauf des Fehlers in Abhängigkeit von der Länge  $l/r$  für mehrere Parameter abzulesen.

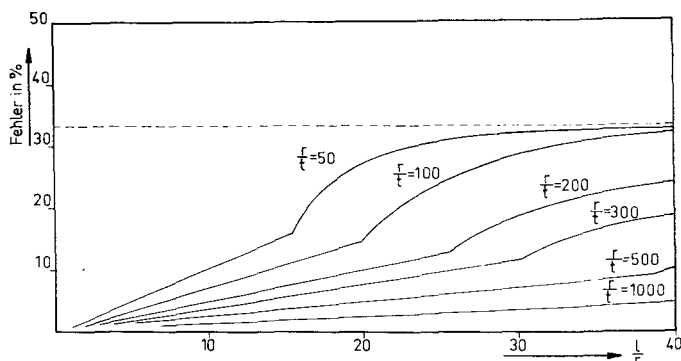


Abb. 3. Fehler der kritischen Lasten nach der technischen Theorie

Die Kurven der Abb. 3 stellen die Abweichung der Lösungen der vereinfachten Theorie von den Ergebnissen der genauen Theorie dar. Dabei sind für  $n = 2$  die Girlandenkurven selbst verglichen worden, während für  $n > 2$  die Einhüllenden der Girlandenkurven dem Vergleich zugrunde liegen. Es zeigt sich, daß bei allen Parametern  $r/t$  bis zum Erreichen der Beulenzahlen  $n = 2$  der Fehler etwa linear anwächst, bei den dicken Schalen stärker, bei den dünnen schwächer. Sobald nur zwei Beulen auftreten, wächst der Fehler schnell an, so daß die technische Theorie spätestens an dieser Stelle unbrauchbar wird. Die gleichen Einschränkungen sind auch für die nichtlineare technische Theorie notwendig, so daß aus Abb. 3 abgelesen werden kann, für welche Schalenparameter das hier behandelte Nachbeulverhalten vermutlich zutrifft.

## 6. Näherungslösung für den überkritischen Bereich

### 6.1 Lösungsansatz

Als Ansatz für die Durchbiegungsfunktion sei der auch von Wolmir<sup>5)</sup> und anderen benutzte Ausdruck

$$\tilde{w} = f_0 + f_1 \sin \alpha x \sin n \varphi + f_2 \sin^2 \alpha x \quad (8)$$

verwendet. Die mechanische Bedeutung der einzelnen Glieder läßt sich leicht erklären. Das erste Glied stellt die Verschiebung des Schalenrandes in radialer Richtung dar, das zweite entspricht der Lösung des Stabilitätsproblems und das dritte bringt die Gestaltänderung der Beulfläche bei wachsender Verformung zum Ausdruck.

Für die Durchrechnung ist es zweckmäßig, Gl. (8) etwas umzuformen:

<sup>5)</sup> [6], S. 355.

$$\tilde{w} = a_0 + a_1 \sin \alpha x \sin n \varphi + a_2 \cos 2 \alpha x \quad (9)$$

mit

$$a_0 = f_0 + \frac{1}{2} f_2, \quad a_1 = f_1, \quad a_2 = -\frac{1}{2} f_2.$$

In dieser Form kann das letzte Glied der Gl. (9) auch als das dritte Glied eines Fourier-Ansatzes für die Beulfigur gedeutet werden. Die Kräfte- und Randbedingungen werden durch dieses Glied zwar verletzt, aber die im Sinne der Variationsrechnung wesentlichen — in diesem Fall die geometrischen — Randbedingungen sind erfüllt, so daß der Ansatz (9) zulässig ist.

Das Variationsproblem enthält außer der Funktion  $w$  die Spannungsfunktion  $F$ , für die noch ein Ansatz zu wählen ist.  $\tilde{F}$  wird so bestimmt, daß die Ansatzfunktionen  $\tilde{w}$  und  $\tilde{F}$  die Differentialgleichung (1 b) erfüllen. Die Funktion  $\tilde{w}$  und ihre Ableitungen in (1 b) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \tilde{F} = \frac{E t}{r^2} & \left[ (a_1 a_2 2 \alpha^2 n + a_1 r \alpha^2) \sin \alpha x \sin n \varphi \right. \\ & + (a_1^2 \frac{\alpha^2 n^2}{2} + a_2 r 4 \alpha^2) \cos 2 \alpha x \\ & \left. + a_1^2 \frac{\alpha^2 n^2}{2} \cos 2 n \varphi - a_1 a_2 2 \alpha^2 n^2 \sin 3 \alpha x \sin n \varphi \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Für den Lösungsansatz der inhomogenen Differentialgleichung (10)

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i = \frac{E t}{r^2} & [b_1 \sin \alpha x \sin n \varphi + b_2 \cos 2 \alpha x \\ & + b_3 \cos 2 n \varphi + b_4 \sin 3 \alpha x \sin n \varphi] \end{aligned} \quad (11)$$

erhält man nach den entsprechenden Differentiationen durch Koeffizientenvergleich mit Gl. (10)

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1 a_2 2 \alpha^2 n^2 + a_1 r \alpha^2}{(\alpha^2 + n^2)^2}, \\ b_2 &= \frac{a_1^2 n^2 + a_2 r 8}{32 \alpha^2}, \\ b_3 &= a_1^2 \frac{\alpha^2}{32 n^2}, \\ b_4 &= -a_1 a_2 \frac{2 \alpha^2 n^2}{(9 \alpha^2 + n^2)^2}. \end{aligned} \quad (12a-d)$$

Die Funktionen Gl. (9) und Gl. (11) bilden eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1 b). Es ist noch eine Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta \Delta F = 0$$



zu addieren, so daß auch der nicht ausgebeulte Zustand mit

$$F'' = n_{\varphi} = \text{const}$$

in der Gesamtlösung enthalten ist. Mit  $\tilde{F}_h = E t / r^2 b_0 x^2$  lautet die Spannungsfunktion schließlich

$$\begin{aligned} \tilde{F} = \frac{E t}{r^2} [b_0 x^2 + b_1 \sin \alpha x \sin n \varphi + b_2 \cos 2 \alpha x \\ + b_3 \cos 2 n \varphi + b_4 \sin 3 \alpha x \sin n \varphi] . \end{aligned} \quad (13)$$

$b_0$  wird später zusammen mit den Koeffizienten  $a$  durch Variation des Potentials bestimmt.

## 6.2 Potential des Näherungsansatzes

(9) und (13) in die Gleichung für das Potential (3) eingesetzt, ergeben das Potential

$$\begin{aligned} \tilde{II} = \frac{1}{2} \iint_{\varphi s} \left\{ \frac{B}{r^2} [\tilde{w}''^2 + \tilde{w}'^2 + 2 \tilde{w}'^2] - \frac{r^2}{E t} [\tilde{F}''^2 + \tilde{F}'^2 + 2 \tilde{F}'^2] \right. \\ \left. - 2 r \tilde{F}'' \tilde{w} + \tilde{F}'' \tilde{w}^2 + \tilde{F}'^2 \tilde{w}'^2 - 2 \tilde{F}' \tilde{w}' \tilde{w} \right\} dx d\varphi \\ - \iint_{\varphi s} q \tilde{w} r^2 d\varphi dx . \end{aligned}$$

Nach längeren aber einfachen Zwischenrechnungen erhält man unter Beachtung von (12)

$$\begin{aligned} \tilde{II} = \pi l \frac{E t}{r^2} \left\{ a_1^4 \frac{\alpha^4 + n^4}{128} + a_1^2 a_2^2 \alpha^4 n^4 \left[ \frac{1}{(\alpha^2 + n^2)^2} + \frac{1}{(9 \alpha^2 + n^2)^2} \right] \right. \\ + a_1^2 a_2 r n^2 \left[ \frac{\alpha^4}{(\alpha^2 + n^2)^2} + \frac{1}{8} \right] + a_1^2 r^2 \left[ \frac{\alpha^4}{4 (\alpha^2 + n^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{t^2}{12 r^2 (1 - \mu^2)} \frac{(\alpha^2 + n^2)^2}{4} \right] \\ + a_2^2 r^2 \left( \frac{1}{2} + 8 \frac{t^2}{12 r^2 (1 - \mu^2)} \alpha^4 \right) - a_0 r^3 2 \frac{q r}{E t} \\ \left. - a_0 b_0 4 r + a_1^2 b_0 \frac{n^2}{2} - b_0^2 4 \right\} . \end{aligned} \quad (14)$$

Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$\nu = \frac{n^2}{\alpha^2}, \quad \delta = \frac{l^2}{r t}$$

und

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\pi^4}{\delta^2} \frac{1 + \nu^2}{128}, \\
C_2 &= \pi^4 \frac{\nu^2}{\delta^2} \left[ \frac{1}{(1 + \nu)^2} + \frac{1}{(9 + \nu)^2} \right], \\
C_3 &= \pi^4 \frac{\nu}{\delta} \left[ \frac{1}{(1 + \nu)^2} + \frac{1}{8} \right], \\
C_4 &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(1 + \nu)^2} + \frac{\pi^4 (1 + \nu)^2}{12 (1 - \mu^2) \delta^2} \right], \\
C_5 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3 (1 - \mu^2)} \frac{\pi^4}{\delta^2}, \\
C_6 &= - \frac{\nu}{4} \frac{\pi^2}{\delta}
\end{aligned} \tag{15 a-f}$$

ergibt sich aus (14)

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi} &= \pi l \frac{E t}{r^2} \frac{l^4}{\delta^2} \left\{ \frac{a_1^4}{t^4} C_1 + \frac{a_1^2 a_2^2}{t^4} C_2 + \frac{a_1^2 a_2}{t^3} C_3 + \frac{a_1^2}{t^2} C_4 \right. \\
&\quad + \frac{a_2^2}{t^2} C_5 - \frac{a_0}{t} 2 \frac{q r^2}{E t^2} - \frac{a_0}{t} \frac{b_0}{r t} 4 \\
&\quad \left. - \frac{a_1^2}{t^2} \frac{b_0}{r t} 2 C_6 - \frac{b_0^2}{r^2 t^2} 4 \right\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

### 6.3 Variation des Potentials

Aus der Bedingung, daß die Variationen des Potentials (16) nach den Freiwerten  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  und  $b_0$  verschwinden müssen, folgen vier Gleichungen zwischen der Belastung und den Freiwerten.

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \frac{b_0}{r t}} = 0 \quad \text{führt auf}$$

$$\frac{a_0}{t} = -2 \frac{b_0}{r t} + \frac{a_1^2}{t^2} \frac{\nu \pi^2}{8 \delta}, \tag{17 a}$$

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \frac{a_0}{t}} = 0 \quad \text{ergibt}$$

$$\frac{b_0}{r t} = -\frac{1}{2} \frac{q r^2}{E t^2}, \tag{17 b}$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \frac{a_1}{t}} = 0 \quad \text{ergibt}$$

$$2 \frac{a_1^2}{t^2} C_1 + \frac{a_2^2}{t^2} C_2 + \frac{a_2}{t} C_3 + C_4 + 2 \frac{b_0}{r t} C_6 = 0, \quad (17c)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \frac{a_2}{t}} = 0 \quad \text{ergibt}$$

$$\frac{a_2}{t} = - \frac{\frac{a_1^2}{t^2} C_3}{2 \left( \frac{a_1^2}{t^2} C_2 + 2 C_5 \right)}. \quad (17d)$$

Durch Einsetzen von Gl. (17d) und (17b) in (17c) erhält man eine Beziehung zwischen der Belastung  $\frac{q r^2}{E t^2}$  und dem Koeffizienten  $\frac{a_1}{t}$ ,

$$\frac{q r^2}{E t^2} = - \frac{C_4}{C_5} + \frac{a_1^2}{t^2} \left[ \frac{C_3^2}{2 C_6 \left( \frac{a_1^2}{t^2} C_2 + 2 C_5 \right)} - \frac{\frac{a_1^2}{t^2} C_3^2 C_2}{4 C_6 \left( \frac{a_1^2}{t^2} C_2 + 2 C_5 \right)^2} - 2 \frac{C_1}{C_6} \right], \quad (18)$$

so daß für vorgegebene Werte  $a_1/t$  sowohl die Belastung  $q$  als auch mit Hilfe von (17a, b, d) die Freiwerte  $\frac{b_0}{r t}$ ,  $\frac{a_0}{t}$ ,  $\frac{a_2}{t}$  bestimmt werden können.

#### 6.4 Kraft-Verformungskurven

In den Gln. (17a, b) und (18) sind die Kraft-Verformungsbeziehung des Grundzustandes und die Lösung des Stabilitätsproblems als Sonderfall enthalten. Für die Verformung des Grundzustandes mit  $a_1/t = a_2/t = 0$  erhält man nach Einsetzen von (17b) in (17a) den bekannten Ausdruck

$$\frac{a_0}{t} = \frac{q r^2}{E t^2}.$$

Die Eigenwerte des Manteldrucks ergeben sich mit  $a_1/t \ll 1$  aus (18) zu

$$\frac{q_0 r^2}{E t^2} = - \frac{C_4}{C_5}. \quad (19)$$

Unter Beachtung von (15d, e) und mit den Abkürzungen  $\delta = \frac{l^2}{r t}$ ,  $\nu = \frac{n^2}{a^2}$  läßt sich (19) in die bekannte Gleichung für den kritischen Manteldruck (7) umschreiben.

Im überkritischen Bereich wird die Kraft-Verformungskurve besonders anschaulich, wenn wie in Abb. 4  $q/q_K$  als Funktion von  $w_m/t$  dargestellt wird. Für die maximale Beulamplitude ohne die Verformung des Grundzustandes folgt aus (9)

$$\frac{w_m}{t} = \frac{a_0}{t} + \frac{a_1}{t} - \frac{a_2}{t} - \frac{qr^2}{Et^2}.$$

Für einen fest gewählten Wert  $\delta = \frac{l^2}{rt}$  ergibt sich eine Kurvenschar mit dem

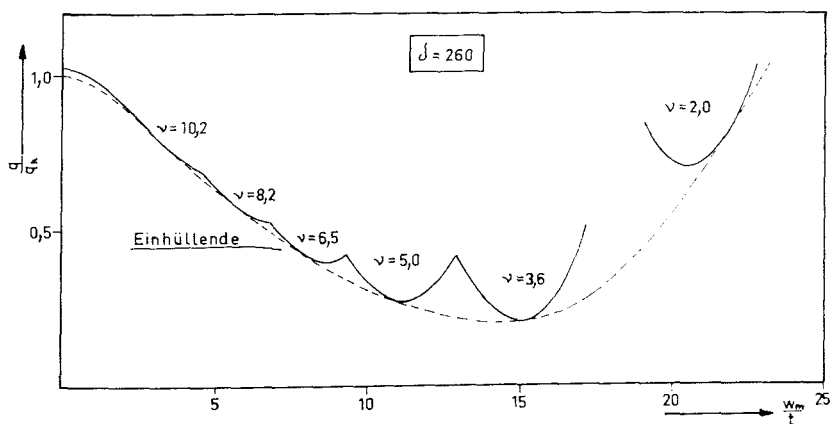
Parameter  $\nu = \frac{n^2}{\alpha^2}$ , der im wesentlichen die Beulenzahl in Umfangsrichtung

und das Längenverhältnis  $l/r$  enthält. Von den sich überschneidenden Kurven sind nur die jeweils niedrigsten Kurvenstücke maßgebend, die aneinander gereiht eine Girlande bilden. Wegen des in  $\nu$  enthaltenen Verhältnisses  $l/r$  gehört zu jeder Schale eine eigene Girlande mit ganzzahligen  $n$ . Die Einhüllende der so entstehenden Girlandenschar hat ein Minimum, das sowohl einen positiven als auch einen negativen Wert annehmen kann.

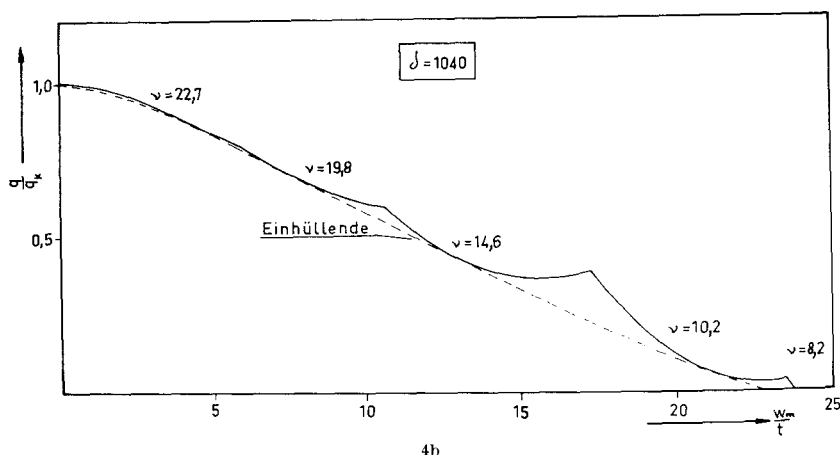
In dem von Wolmir<sup>6)</sup> angegebenen und in Abb. 4a dargestellten Beispiel mit  $\delta = 260$  ist das Minimum positiv, für  $\delta = 1040$  ergibt sich jedoch z. B. ein negativer Wert.

Diese zunächst überraschende Erscheinung wird in den bisherigen Veröffentlichungen über die Kreiszyinderschale unter Manteldruck nicht erwähnt. Andererseits gibt es Parallelen bei der Zylinderschale unter Axiallast [5] und unter Ringlast [9]. Praktische Bedeutung kommt den Gleichgewichtslagen mit negativer Belastung im allgemeinen nicht zu. Die zugehörigen Beulamplituden sind sehr groß und liegen jenseits des Bereiches, der bei den folgenden Betrachtungen von Interesse ist. Eine wichtige Aussage läßt sich allerdings machen:

<sup>6)</sup> [6], S. 358.



4a

Abb. 4a, 4b. Kraft-Verformungskurven im überkritischen Bereich,  $\mu = 0,3$ .

Aus der Existenz negativer Minima folgt, daß der Vorschlag von Wolmir, die Minima der Einhüllenden als die Traglast zu deuten, nicht haltbar ist. Man muß sich daher nach einem anderen Instabilitätskriterium umsehen.

### 6.5 Instabilitätskriterium

Aus dem Kraft-Verformungsverlauf in Abb. 4 erkennt man eine ähnliche Abhängigkeit zwischen Belastung und Durchbiegung mit dem Abfall der Tragfähigkeit nach dem Erreichen des Verzweigungspunktes wie bei der axial belasteten Kreiszyinderschale. Es liegt daher nahe, das von Pflüger<sup>7)</sup> für die axial belastete Kreiszyinderschale aufgestellte Instabilitätskriterium auch auf die Kreiszyinderschale unter Manteldruck anzuwenden. Nach dieser Hypothese wird angenommen, daß der Übergang vom Grundzustand zum endlich benachbarten ausgebeulten Zustand dann eintritt, wenn bei wachsendem Manteldruck eine „Stördurchbiegung“ die Größe erreicht hat, die auch die Amplitude  $w_m$  der ausgebeulten Schale bei dem gleichen Manteldruck annehmen würde. Man kann danach die Beulamplituden  $w_m$  den zum Durchschlagen erforderlichen Störverschiebungen  $w_{st}$  gleichsetzen.

In Abb. 5 sind für eine Schale mit  $l/r = 2,09$  und  $r/t = 40,4$  die Kraft-Verformungskurven aufgetragen. Dazu sind als Beispiele zwei mögliche Störverschiebungen eingetragen. Während die Schale mit der Störung I bei  $q/q_K = 0,92$  mit fünf Beulen durchschlagen wird, ist bei II mit vier Beulen und einer Durchschlaglast von  $q/q_K = 0,8$  zu rechnen. Da in den Punkten  $B_1$  und  $B_2$  das Gleichgewicht labil ist, wird das eigentliche Durchschlagen noch anschließen, so daß die Schale danach in den Punkten  $B_1'$  und  $B_2'$  zur Ruhe kommt. Dabei ist vorausgesetzt, daß sich die im Augenblick des Ausbeulens vorhandene Beulfigur — insbesondere die Beulenzahl  $n$  — während des weiteren Durchschlagens nicht ändert.

<sup>7)</sup> [5], S. 100.

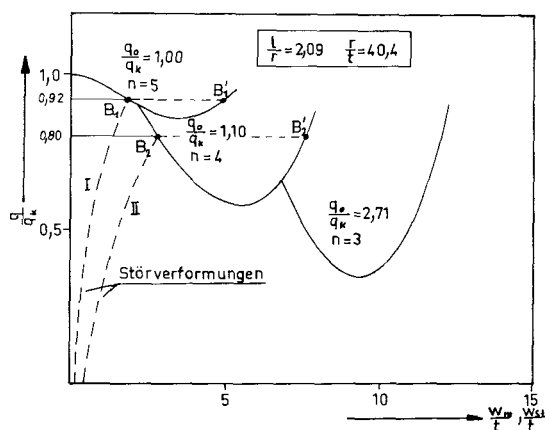


Abb. 5  
Beispiel für Ermittlung von  
Durchschlaglasten

## 6.6 Beullast

Die Ursache einer Störung wird in vielen Fällen durch Vorbeulen erklärt, die mit wachsender Belastung so weit vergrößert werden, bis die zum Durchschlagen erforderliche Störverschiebung erreicht ist. Das Anwachsen einer Vorbeule, deren Amplitude mit  $w_v$  bezeichnet sei, wird durch die sogenannte Theorie zweiter Ordnung hinreichend genau beschrieben. Die entsprechende Differentialgleichung

$$\Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{r^2}{t^2} 12 (1 - \mu^2) w'''' = - \frac{r^2}{B} q r \Delta \Delta (w'' + w_r) \quad (20)$$

folgt aus der linearisierten Beulgleichung (6), wenn man statt der Zusatzverschiebung  $\bar{w}$  die gesamte Verschiebung  $w$  anschreibt und in dem Glied, das den Einfluß von  $n_\psi$  auf das Gleichgewicht des verformten Elementes darstellt, zu der elastischen Verformung die Vorverformung addiert.

Mit dem auch früher schon verwendeten Ansatz für die Vorverformung

$$w_v = C_v \sin \alpha x \sin n \varphi \quad (21)$$

lautet die Lösung von (20)

$$w = C \sin \alpha x \sin n \varphi .$$

Nach Einsetzen von (21) in (20) und einigen Zwischenrechnungen folgt

$$C \left[ \frac{\beta}{1 - \mu^2} \frac{n^2 (1 + \nu)^2}{\nu^2} + \frac{1}{n^2 (1 + \nu)^2} \right] = \frac{q r}{E t} (C_v + C) .$$

Unter Beachtung von (7) und nach Erweiterung mit  $q_0/q_K$  erhält man die einfache Form

$$\frac{q}{q_K} = \frac{q_0}{q_K} \frac{C}{C + C_v} . \quad (22)$$

Bei Eintritt des Durchschlagens ist die Stör-Amplitude  $C$  gleich der erforderlichen Störverschiebung  $w_{st}$ , so daß man aus (22) für die Durchschlaglast

$$\frac{q_K D}{q_K} = \frac{q_0}{q_K} \frac{w_{st}}{w_{st} + C_v} \quad (23)$$

erhält. Ist die größte Vorbeul-Amplitude einer Schale bekannt, so läßt sich die aus (23) folgende Kurve für  $q_K D$  als Funktion von  $w_{st}$  wie in Abb. 5 mit der zugehörigen Kraft-Verformungskurve zum Schnitt bringen. Der Schnittpunkt liefert die gesuchte Durchschlaglast. Sinnvolle Annahmen über die Größe der in der Praxis vorhandenen Vorbeulen lassen sich etwa wie in [5] leicht treffen.

Die Brauchbarkeit der benutzten Hypothese zur Ermittlung der Durchschlaglast ist in [10] für die axial gedrückte Kreiszyinderschale bewiesen. Daß sie mit großer Wahrscheinlichkeit auch bei der Zylinderschale unter Manteldruck gute Ergebnisse liefert, läßt sich einem Bericht von Stern [11] entnehmen. Da es sich jedoch hierin um die Auswertung nur einiger weniger Versuche handelt, müßten zur endgültigen Bestätigung noch weitere Versuche durchgeführt werden<sup>8)</sup>.

## 7. Zusammenfassung

Das Problem des Nachbeulverhaltens der Kreiszyinderschale unter Manteldruck wurde wegen gewisser Widersprüche in der vorliegenden Literatur erneut behandelt. Ausgehend von einem neu formulierten Potential der Schale wurden mit Hilfe der Ritzschen Methode Kraft-Verformungskurven im überkritischen Bereich ermittelt. Dabei wurde die Beulenzahl in Umfangsrichtung nicht als Freiwert für das Näherungsverfahren verwendet, sondern durch die von Pflüger eingeführte Hypothese bestimmt, nach der die kleinsten erforderlichen Störverschiebungen den Durchschlagvorgang einleiten.

Für das Auftreten von Störverschiebungen werden Vorbeulen verantwortlich gemacht. Sind diese bekannt, so läßt sich die Durchschlaglast aus dem Schnittpunkt der Störverschiebungsfunktion mit der entsprechenden Kraft-Verformungskurve ermitteln.

## Literaturverzeichnis

- [1] Donnell, L. H.: ASME Transactions **56** (1934), S. 795.
- [2] Nash, W. A.: Effects of large deflections and initial imperfections on the buckling of cylindrical shells subject to hydrostatic pressure. J. Aeron. Sci. **22** (1955), S. 264–269.
- [3] Kempner, J., Pandalai, K. A. V., Patel, S. A., Crouzet-Pascal, J.: Postbuckling behaviour of circular cylindrical shells under hydrostatic pressure. J. Aeron. Sci. **24** (1957), S. 253.
- [4] Flügge, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Berlin 1962.
- [5] Pflüger, A.: Zur axial gedrückten Kreiszyinderschale. Abhandl. der Braunschweig. Wiss. Ges., Bd. XIV (1962), S. 91.
- [6] Wolmir, A. S.: Biegsame Platten und Schalen. Berlin 1962.

<sup>8)</sup> Eine entsprechende Versuchsreihe ist am Institut für Statik der T.H. Hannover in Vorbereitung.

- [7] *Begemeier, W.*: Kreiszyylinder unter Außendruck. Unveröffentlichte Diplomarbeit am Lehrstuhl für Statik, T.H. Hannover 1963.
- [8] *Pflüger, A.*: Stabilitätsprobleme der Elastostatik. 2. Aufl., Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York 1964.
- [9] *Dierks, K.*: Die Kreiszyinderschale unter Ringlast im überkritischen Bereich. Diss. Hannover 1965.
- [10] *Pflüger, A.*: Zur praktischen Berechnung der axial gedrückten Kreiszyinderschale. Der Stahlbau **32** (1963), S. 161.
- [11] *Stern, J.*: Zum Einfluß der Vorverformungen beim Beulproblem der Kreiszyinderschale unter Manteldruck. Mitt. d. Inst. f. Statik d. T.H. Hannover, Mitt. Nr. 8, Hannover 1965.